



Presentación

Te doy la bienvenida a mi página, esta está concebida como complemento a la presentación del desarrollo formal de los contenidos en clases. Aquí se exponen las materias en forma secuencial a los programas de matemáticas propios del Liceo Parroquial San Antonio. Consta de información estructurada en función de modelos constructivistas de aprendizajes y de internalización de conceptos aritméticos, algebraicos y geométricos, como también de la institucionalización necesaria de los mismos. En el material (Guías, presentaciones en P.P , Temas generales , Taller de P.S.U) encontrarás abundantes ejercicios y problemas de distintos grados de dificultad, los que se han ordenado de forma que se pueda seguir con facilidad el desarrollo natural de cada materia.

Como una de las causas del bajo rendimiento que en ocasiones se alcanza, es la dificultad de no disponer de métodos ordenados de resolución, de ejercicios y problemas, y de no contar con apuntes claros y adecuados, es que estoy convencido, que este medio , bien empleado, constituirá una gran ayuda para ti.

También está pensada para aquellos que pretenden profundizar las materias con el propósito de continuar estudios superiores y he dispuesto para ellos problemas de mayor dificultad para enriquecer y ampliar los esquemas mentales, como también para ponerles en permanente desafío pudiendo encontrar aquí, materias suficiente de consulta que les permita revisar y aclarar conceptos fundamentales para continuar creciendo en el maravilloso mundo de los números.

Aclaro eso sí, que esta página es fundamentalmente una recopilación de listados y guías de ejercicios que se han obtenido de diversas fuentes, al mismo tiempo la forma como se construyen los conceptos, sí se pueden atribuir al ejecutor de esta iniciativa.

Es necesario y de justicia reconocer la colaboración de alumnos que han aportada a este desafío poniendo a disposición programas computaciones en la transcripción de borradores para presentar en trabajo de calidad.

Así mismo va este agradecimiento, por el apoyo brindado, por parte de la Dirección y Unidad Técnica Pedagógica del Liceo, personalizado en la profesora Sra. Guacolda Peña N., aportando ideas, renovando iniciativas y estimulando permanentemente este desafío.

Finalmente quiero agregar que se puede afirmar que el “hacer ejercicios” y “resolver problemas” en forma más o menos rutinaria, te ayudará a mejorar tus conocimientos, así tal vez logres una necesaria mecanización y una vaga idea de los conceptos; lo verdaderamente relevante y eficaz es saber por qué das cada paso en la resolución de los mismos y por sobre todo, que descubras el encanto que hay en las matemáticas y que te encantes con ella.

Daniel Montoya
Profesor de Matemáticas

Conceptos previos

Los números fraccionarios tuvieron su origen en las medidas. Los babilonios utilizaban como único denominadores 60. Los egipcios empleaban la unidad como numerador, para representar $\frac{7}{8}$, escribían: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

Los griegos marcaban el numerador con un acento y el denominador con dos; o colocaban el denominador como exponente. Hiparco, sabio griego, introdujo las fracciones babilónicas en la astronomía griega.

En la aritmética es conveniente simplificar la operatoria usando algunos mecanismos sencillos:

Ejemplo: $1\frac{2}{9} - 4\frac{4}{9} - 2\frac{7}{9} + 8\frac{1}{9} = 2\frac{1}{9}$

Caso 1:
$$\frac{2}{3} - \frac{5}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right) \rightarrow \frac{10}{3} - \frac{6}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow 1\frac{1}{3}$$

Caso 2:
$$3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}$$
 Solo se debe escribir el entero y la fracción como un todo.

Caso 3:
$$-2 - \frac{3}{7} = -2\frac{3}{7}$$
 Igual al caso anterior, solo que ahora el todo es negativo.

Caso 4:
$$6 - \frac{2}{9} = 5\frac{3}{9}$$
 Se debe quitar un entero, luego completar el entero con la fracción $\frac{2}{9}$, completar el entero con $\frac{7}{9}$ y escríbalo como un todo.

Caso 5:
$$-7 + \frac{4}{11} = -6\frac{7}{11}$$
 Igual al caso anterior solo que ahora el todo es negativo, pues el entero también lo es.

Caso 6:
$$1\frac{2}{9} - 4\frac{4}{9} - 2\frac{7}{9} + 8\frac{1}{9}$$

$$(1 - 4 - 2 + 8) + \left(\frac{2}{9} - \frac{4}{9} - \frac{7}{9} + \frac{1}{9}\right)$$

$$3 + -\frac{8}{9} = 2\frac{1}{9}$$
 Una simple aplicación de lo anterior.

Caso 7:

$$\begin{aligned} & 3\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4} + 5\frac{1}{2} - 4\frac{5}{6} - 9\frac{3}{4} \\ & (3 - 1 + 5 - 4 - 9) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} - \frac{3}{4} \right) \\ & -12 + \left(\frac{8}{12} - \frac{3}{12} + \frac{6}{12} - \frac{10}{12} - \frac{9}{12} \right) \\ & -12 + -\frac{8}{12} = -12\frac{8}{12} = -12\frac{2}{3} \end{aligned}$$

¡Así es muy fácil!

Caso 8:

$$\begin{aligned} & -1\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{10} + 6\frac{17}{20} + 4\frac{1}{2} \\ & (-1 - 3 - 2 + 6 + 4) \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{10} + \frac{17}{20} + \frac{1}{2} \right) \\ & 4 + \left(-\frac{8}{20} - \frac{15}{20} - \frac{2}{20} + \frac{17}{20} + \frac{10}{20} \right) \\ & 4 + \frac{2}{20} = 4\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Caso 9:

$$\begin{aligned} & -2 + \frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} - 12\frac{3}{4} + 1\frac{4}{5} \\ & (-2 + 3 - 12 + 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \right) \\ & -8 + \left(-\frac{30}{60} + \frac{40}{60} - \frac{45}{60} + \frac{48}{60} \right) \\ & -8 + \frac{73}{60} \rightarrow -8 + 1 + \frac{13}{60} \rightarrow -7 + \frac{13}{60} = 6\frac{47}{60} \end{aligned}$$

¡Y siempre es lo mismo!

Multiplicación en Q

Regla general:

Se multiplican los numeradores y este producto se "parte" por el producto de los denominadores. El resultado se simplifica (aunque regularmente se simplifican antes de multiplicar) y se hallan los enteros se los hay.

Algunos ejemplos:

$$1) \frac{5}{7} * \frac{3}{4} * \frac{17}{8} = \frac{5 * 3 * 17}{7 * 4 * 8} = \frac{255}{224} = 1\frac{31}{224}$$

$$2) \frac{8}{9} * \frac{4}{16} * \frac{6}{12} = \frac{8 * 4 * 6}{9 * 16 * 12} = \frac{1}{9}$$

$$3) 3\frac{1}{4} * 1\frac{1}{3} * 1\frac{11}{26} * 1\frac{1}{37}$$

Es necesario expresar como fracción simple, en esta forma:

$$\frac{13}{4} * \frac{4}{3} * \frac{37}{26} * \frac{38}{37} = \frac{13}{4} * \frac{4}{3} * \frac{37}{26} * \frac{38}{37} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$$

División en Q

Se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor.

En forma recíproca, se escribe: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{1}{a/b}$

Ejemplos: 1) $\boxed{\frac{3}{5} : \frac{7}{10} = \frac{3}{5} * \frac{10}{7} = \frac{6}{7}}$ 2) $\boxed{2\frac{3}{5} : 3\frac{9}{10} = \frac{13}{5} : \frac{39}{10} = \frac{13}{5} * \frac{10}{39} = \frac{2}{3}}$

Lo demás es simple combinación de lo mismo.

Casos especiales

Suma o resta de recíprocos.

Observe que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

- 1) Se suman los denominadores y se escribe en el numerador.
- 2) Se multiplican los mismos y se escribe en el denominador.

Ejemplo: $\boxed{\frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{\text{suma}}{\text{producto}} = \frac{16}{63}}$

En la resta: $\boxed{\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{15} = \frac{-2}{15}}$ (En ese orden)

Algunas pautas de lenguaje básico

- 1) La a parte de b = $a * b$
- 2) La suma de a y b = $a + b$
- 3) El cuadrado de a = a^2
- 4) El exceso de a sobre b = $a - b$
- 5) El cuociente de a y b = $\frac{a}{b}$
- 6) La razón entre a y b = $a : b$

- 7) A es a b como c es a $d = a : b = c : d$
- 8) La suma entre los cuadrados de a y b $= a^2 + b^2$
- 9) El cuadrado de la suma de dos números a y b $= (a + b)^2$
- 10) La diferencia de los cuadrados entre a y b $= a^2 - b^2$
- 11) El cuociente entre a y b es $k = \frac{a}{b} = k$
- 12) El cuociente entre a y b es k y el resto es $c = \frac{a - c}{b} = k$
- 13) a es una cantidad y b una parte de a; el resto es $a - b$
- 14) a aumentado en b $= a + b$
- 15) El doble de a $= 2a$
- 16) El triple, el cuádruplo, el quíntuplo, el séxtuplo de a $= 3a; 4a; 5a; 6a \dots$
- 17) La mitad, la tercera, la cuarta, la quinta, la sexta ... parte de a
- 18) ¿Por qué número se divide a para obtener b? $= a/b$
- 19) ¿Por qué número hay que multiplicar a para obtener b? $= b/a$
- 20) Dos números consecutivos pares $= x ; x + 1$
- 21) Dos números consecutivos pares $= x ; x + 2$
- 22) Un número par $= 2k$
- 23) Un número impar $= 2k - 1$
- 24) Un múltiplo de a $= ka; (k = 0, 1, 2 \dots)$
- 25) El recíproco de a $= 1/a$
- 26) El opuesto de a $= -a$
- 27) La semi suma de a y b $= \frac{a + b}{2}$
- 28) La semi diferencia entre a y b : $\frac{a - b}{2}$
- 29) El semi producto : $\frac{ab}{2}$
- 30) El semi cuociente : $\frac{a}{2b}$
- 31) La raíz enésima a : $\sqrt[n]{a}$
- 32) La enésima potencia de a : a^n
- 33) El valor absoluto de a : $|a|$
- 34) La raíz cuadrada de a : \sqrt{a}
- 35) La raíz cuadrada aritmética de a : $+\sqrt{a}$
- 36) Un número ha disminuido en b : $a - b$
- 37) a es equivalente a b : $a \in b \rightarrow (a = b)$
- 38) a es congruente con b : $a \cong b$
- 39) a es semejante a b : $a \approx b$

Listado de ejercicios

Fraciones complejas

$$1) \frac{\frac{1}{5} + 1\frac{1}{4} - \frac{3}{2} * \frac{4}{9}}{2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{10} + \frac{1}{14} * 7\frac{7}{5}}$$

$$2) \frac{\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{8} - \frac{7}{24}\right) * 3\frac{1}{13}}{5 - \frac{2}{3}}$$

$$3) \frac{\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{25} + \frac{3}{40}\right) * \frac{1}{6}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{12}}$$

$$4) \frac{\left(5\frac{7}{36} - 4\frac{1}{18} + 1\frac{1}{72}\right) * 36}{78 - \frac{1}{2}}$$

$$5) \frac{\left(6\frac{1}{8} - \frac{1}{20} - \frac{1}{55}\right) : \frac{2}{7}}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) * 4\frac{4}{5}}$$

$$6) \frac{\left(9 : \frac{1}{1/3} * \frac{4}{5}\right) * \frac{5}{12}}{6 : \frac{1}{1/2}}$$

$$7) \frac{\frac{2}{3/5} + \frac{4}{6/7}}{\frac{1}{1/5} - \frac{1}{1/3}}$$

$$8) \frac{\frac{2}{3/5} + \frac{4}{6/7}}{\frac{1}{1/5} - \frac{1}{1/3}}$$

$$9) \frac{\frac{1/2}{1/3} + \frac{1/4}{1/5} - \frac{1/5}{1/6}}{\frac{1/6}{1/7} + \frac{1/4}{1/8} - \frac{1/8}{1/9}}$$

$$10) \frac{\frac{2-1/3}{8} + \frac{5/6}{3}}{\left(5 : \frac{1}{8}\right) * \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{10}\right)}$$

$$11) \frac{\frac{3/4}{1/6} + 5\frac{2/3}{1/12}}{6 + \left(8 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$12) \frac{\frac{8}{1/4} + 2 - \frac{1/2}{1/4}}{3 : \left(\frac{5}{3} * \frac{6}{5}\right)}$$

$$13) \frac{\frac{1+1/2}{3} + \frac{1-1/3}{2}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{2}{5} - \frac{8}{6}}}$$

$$14) \frac{\frac{2-2/5}{4-1/4} + \frac{3-1/5}{5-1/5}}{\frac{1/2}{1} + \frac{24}{24}} * \left(23\frac{1}{2} : \frac{47}{12}\right)$$

$$15) \frac{\frac{1}{1-1/5} + \frac{1}{1-1/6}}{\frac{1}{1-1/3} + \frac{1}{1-1/8}} * \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{49} - \frac{62}{343}\right)$$

$$16) 1 + \frac{3}{2 + \frac{+4}{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$17) 2 + \frac{5}{2 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$18) 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}$$

$$19) 5 + \frac{2}{1 + \frac{2}{2 - \frac{1}{4}}}$$

$$20) \frac{5}{6 + \frac{1/3 - 1/5}{3}}$$

Respuestas

Fracciones complejas

1) $\frac{35}{36}$

2) $\frac{4}{13}$

3) $1\frac{1}{50}$

4) 1

5) $17\frac{703}{1056}$

6) $\frac{1}{3}$

7) 4

8) $\frac{1}{50}$

9) $\frac{186}{245}$

10) $\frac{7}{1152}$

11) $8\frac{3}{11}$

12) $21\frac{1}{3}$

13) 5

14) 1

15) $\frac{1}{50}$

16) $1\frac{9}{27}$

17) $4\frac{9}{58}$

18) $3\frac{2}{9}$

19) $6\frac{5}{9}$

20) $\frac{225}{272}$

